Решение задачи о теоретическом профиле безразмерной скорости по толщине пограничного слоя при турбулентном течении в пограничном слое на основе решения дифференциального уравнения Абеля второго рода с применением функции Ламберта

Игорь Евгеньевич ЛОБАНОВ
Московский авиационный институт
доктор технических наук, ведущий научный сотрудник
Москва, Россия
lloobbaannooff@live.ru

Аннотация

В статье было найдено точное аналитическое решение дифференциального уравнения для касательных напряжений в турбулентном пограничном слое, являющихся частным случаем т.н. дифференциального уравнения Абеля второго рода, полученное с помощью специальной функции Ламберта, в то время как ранее считалось, что оно не разрешимо в квадратурах. Кроме этого, были получены ещё несколько важных решённых частных случаев этого уравнения. Полученные в статье аналитические решения преимущественно отличаются от имеющихся ранее либо численных, либо приближённых решений задачи. Полученное решение в безразмерном виде представляет собой теоретический профиль безразмерной скорости по толщине пограничного слоя при турбулентном течении в пограничном слое.

Ключевые слова

теоретический; моделирование; математическое; скорость; координата; безразмерный; профиль; теплообмен; турбулентный; течение; пограничный слой; дифференциальное уравнение Абеля; второго рода; первого рода; функция Ламберта.

Введение

Решение вопроса о профиле скорости в плоском турбулентном потоке несжимаемого теплоносителя может быть дано как из теоретических соображений, так и при помощи введения полуэмпирических и эмпирических зависимостей.

Следует отметить, что целым рядом авторов, например, Дейслером, Ван-Дристом, Рейтхардом, Левичем, Лином, Лойцянским и др. были предложены эмпирические и полуэмпирические зависимости для детерминирования профиля скоростей в турбулентном пограничном слое [1, 2]. Эти профили в области совместного действия молекулярной и турбулентной вязкости имеют довольно сложную конфигурацию, кусочную непрерывность в виде значительного числа отдельных участков. Для практических целей Карманом было предложено разбиение пограничного слоя на три зоны и аппроксимировать две из них логарифмическими формулами; можно также заменить универсальный закон распределения скоростей в турбулентном потоке степенным законом, где логарифмический профиль скоростей есть огибающая семейства степенных профилей.

Сам по себе логарифмический профиль скоростей может быть рассмотрен как определённый факт существования универсального закона распределения безразмерной скорости в турбулентном пограничном слое при обтекания окрестности непроницаемой пластины турбулентным неограниченным изотермическим потоком несжимаемого теплоносителя [1].

В рамках данного исследования ставится задача получения теоретического решения для профиля скорости в плоском турбулентном пограничном слое на основе решения дифференциального уравнения для касательных напряжений.

Материалы и методы исследования

Обоснование расчётной модели турбулентного пристенного течения около поверхности, — как физической, так и математической — описание модели турбулентности для этих условий была сделана в монографии [3], поэтому в рамках данной работы приведём только результирующие выражения. Общекасательное напряжение τ детерминируется как следующая сумма [3]:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy} + \rho\psi\zeta \left(l \frac{dw}{dy} + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dy^2} l^2 \right)^2, \qquad (1)$$

где μ — динамическая вязкость; w — продольная скорость; y — поперечная координата; ρ — плотность; l — линейный размер типа длины пути перемешивания; ζ — коэффициент замещения; ψ — коэффициент корреляции.

Константа турбулентности κ будет определяться следующим выражением:

$$y \cdot \kappa = l \cdot \sqrt{\psi\zeta}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1) и проведя элементарные преобразования, получим:

$$t = m\frac{dw}{dy} + r k^2 y^2 \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 + r \frac{k^3 y^3}{\sqrt{yz}} \frac{dw}{dy} \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{1}{4} r \frac{k^4 y^4}{yz} \left(\frac{d^2 w}{dy^2}\right)^2. \qquad (3)$$

В [3] справедливо указывается, что в пограничном слое существует определённая область, в которой имеет место взаимодействие крупномасштабных и мелкомасштабных пульсаций, существенно влияющих на касательное напряжение, поэтому основной вклад в него будут вносить первый и третий члены правой части (3):

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy} + \rho \frac{\kappa^3 y^3}{\sqrt{\psi\zeta}} \frac{dw}{dy} \frac{d^2 w}{dy^2}. \qquad (4)$$

Приведём уравнение (4) к безразмерному виду, введя безразмерные координату $\eta = yw_* / \nu$ и скорость $\varphi = w / w_*$ ($\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость; $w_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамическая скорость или "скорость трения"):

$$\frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{\kappa^3}{\sqrt{\psi\zeta}} \eta^3 \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} = 1. \qquad (5)$$

В работе [3] указывается, что (5) является частным случаем т. н. дифференциального уравнения Абеля второго рода, которое в данном варианте не приводит к квадратурам, на что указывается в той же работе [3]. Покажем в дальнейшем, что без применения специальных функций это так, однако, применение специальной функции Ламберта [4] позволяет решить это уравнение в квадратурах, а в отдельных случаях — получить его точное аналитическое решение.

Следовательно, имеем дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + f(x) \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} = 1. \qquad (6)$$

Дифференциальное уравнение Абеля второго рода, согласно [5], имеет следующий вид (по классификации [5] — 4.11(б)):

$$\left[g_1(x) y + g_0(x)\right] \frac{dy}{dx} = f_2(x) y^2 + f_1(x) y + f_0(x). \qquad (7)$$

Если принять в уравнении (5) $\frac{d\varphi}{d\eta} = y(x)$, то получим следующее уравнение:

$$y + f(x) y \frac{dy}{dx} = 1. \qquad (8)$$

Последнее уравнение (8) является частным случаем (7) в случае $g_0(x)=0$, $f_2(x)=0$, $f_1(x)=-1$, $f_0(x)=1$, а именно:

$$g_1(x)y\frac{dy}{dx}=-y+1 \quad (9)$$

В работе [5] указывается, что квадратуры возможны в следующих трёх случаях.

Во-первых, если:

$$g_0(x)\left(2f_2(x)+\frac{dg_1(x)}{dx}\right)=g_1(x)\left(f_1(x)+\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\wedge g_1(x)\neq 0 \quad (10)$$

Подставив значения функций, получим:

$$0\cdot\left(2\cdot 0+\frac{dg_1(x)}{dx}\right)=g_1(x)(-1+0)\wedge g_1(x)\neq 0 \text{ или } 0=-g_1(x)\wedge g_1(x)\neq 0 \quad (11)$$

Следовательно, имеет место противоречие, поэтому в данном случае решение уравнения к квадратурам не приводит.

Во-вторых, решение уравнения (8) может быть получено в квадратурах посредством сведения уравнения Абеля второго рода типа 4.11(б) [5] к уравнению Абеля второго рода типа 4.11(а) [5]. Для этого нужно, чтобы $f_0(x)\equiv 0$, что противоречит уравнению (8).

В-третьих, решение уравнения (8) может быть получено в квадратурах посредством сведения уравнения Абеля второго рода к уравнению Абеля первого рода [5]. Рассмотрим уравнение Абеля второго рода 4.11(в) [5]:

$$[g_1(x)y+g_0(x)]\frac{dy}{dx}=f_3(x)y^3+f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x) \quad (12)$$

Из (12) видно, что уравнение (8) является частным случаем (12) в случае $g_0(x)=0$, $f_3(x)=0$, $f_2(x)=0$, $f_1(x)=-1$, $f_0(x)=1$.

Свести уравнение (12) к уравнению Абеля первого рода 4.10 [5]:

$$\frac{dy}{dx}=f_3(x)y^3+f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x) \quad (13)$$

можно при реализации подстановки

$$g_1(x)y+g_0(x)=\frac{1}{u(x)}, \quad (14)$$

если $g_1(x)y+g_0(x)\neq 0$ и $g_1(x)\neq 0$.

Последние требования для уравнения (8) выполняются, поскольку $g_0(x)=0$, $g_1(x)\neq 0$ и $g_1(x)y\neq 0$.

Для решения уравнения Абеля первого рода в квадратурах необходимо выполнение следующих условий [5]:

Решение в квадратурах для случаев 4.10(а), (б), (в) [5] возможно при $f_3(x)\neq 0$.

Квадратуры для случая 4.10(г) возможны при $f_0(x)\equiv 0$. Переход уравнение Абеля первого рода в уравнение Бернулли возможно при $f_0(x)\equiv 0$ и $f_2(x)\equiv 0$ — случай 4.10(д) [5]. Сведение к уравнению с разделяющимися переменными возможно при $f_0(x)\equiv 0$, $f_1(x)\equiv 0$ и $\frac{d}{dx}\left(\frac{f_3(x)}{f_2(x)}\right)=cf_2(x)$ (*c* — константа) — случай 4.10(е) [5]. Для решения в случае 4.10(ж) [5] необходимо, чтобы $f_3(x)\neq 0$.

Очевидно, что для уравнения (8) вышеприведённые условия не выполняются, поэтому оно не сводится к квадратурам традиционными методами, что справедливо указывается в работе [5].

Результаты и обсуждение

Общее решение данного дифференциального уравнения (6) можно получить с помощью введения специальной функции Ламберта *W*(*x*):

$$y(x)=\int W\left(\frac{\exp\left(-\int \frac{dx}{f(x)}-1\right)}{C_1}\right)dx+x+C_2\,, \tag{15}$$

где $W(x)\cdot\exp(W(x))=x$ — функция Ламберта; C_1 и C_2 — константы.

В более простых частных случаях можно провести интегрирование для решения (15). Например, если *f*(*x*)=1, *f*(*x*)=*x*, *f*(*x*)= $\sqrt{x}$, то решение (15) будет выглядеть соответственно:

$$y(x)=-\frac{1}{2}W\left(\frac{e^{-x-1}}{C_1}\right)^2-W\left(\frac{e^{-x-1}}{C_1}\right)+x+C_2\,, \tag{16}$$

$$y(x)=e^{-1}\mathrm{Ei}\left(1,W\left(\frac{e^{-1}C_1}{x}\right)\right)C_1+W\left(1,W\left(\frac{e^{-1}C_1}{x}\right)\right)x+x+C_2\,, \tag{17}$$

$$y(x)=-\frac{1}{2}W\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}-1}}{C_1}\right)^2\sqrt{x}-\frac{1}{12}W\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}-1}}{C_1}\right)^3-W\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}-1}}{C_1}\right)\sqrt{x}-\frac{3}{8}W\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}-1}}{C_1}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{2}W\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}-1}}{C_1}\right)+x+C_2\,, \tag{18}$$

где Ei(*a*, *z*)— интегральная показательная функция. Для Re(z)>0: $\mathrm{Ei}(a,z)=\int_1^\infty e^{-tz}t^{-a}dt$.

Данная специальная функция общеизвестна; её свойства, например, ветвления, особые точки и т.д. приводится в специальной математической литературе [6].

Решение уравнения (8), естественно, получить ещё проще:

$$y(x)=W\left(\frac{\exp\left(-\int \frac{dx}{f(x)}-1\right)}{C_1}\right)+1. \tag{19}$$

Для уравнения (19) могут быть получены решения для всех элементарных функций *f*(*x*), а также и для некоторых специальных функций *f*(*x*); в качестве иллюстрации приведём только решение (19) для функции Ламберта, т.е. когда *f*(*x*)=*W*(*x*):

$$y(x)=1+ \tag{20}$$
$$+\exp\left(\mathrm{Ei}(1,-W(x))-C_1-1-\frac{x}{W(x)}-W\left(\exp\left(\mathrm{Ei}(1,-W(x))-C_1-1-\frac{x}{W(x)}\right)\right)\right).$$

Значения констант C_1 и C_2 в решении (15) для уравнения (6) найдём из следующих асимптотических граничных условий:

при $\eta\to 0$: $$\frac{d\varphi}{d\eta}\to\frac{1}{1+(n\eta)^4}\approx 1-(n\eta)^4, \tag{21}$$

где n=0,124;

при η>>0: $$\frac{d\varphi}{d\eta}\to\frac{1}{\kappa\eta}, \tag{22}$$

где κ=0,4.

Теперь обратимся к детерминированию функций ψ и ζ, входящих в уравнение (5). В работе [3] на основе анализа уравнений турбулентного переноса было выведено следующее соотношение:

$$\frac{1}{\kappa\eta}+\frac{\kappa}{\sqrt{\psi\zeta}}=1. \tag{23}$$

Следовательно, можно получить зависимость $\sqrt{\psi\zeta}$:

$$\sqrt{\psi\zeta}=\frac{\kappa^2\eta}{\kappa\eta-1}. \tag{24}$$

Т.о., результирующее дифференциально уравнение будет выглядеть следующем образом:

$$\frac{d\varphi}{d\eta}+\kappa\eta^2(\kappa\eta-1)\frac{d\varphi}{d\eta}\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}=1. \tag{25}$$

Решение уравнения (25) получим на основании решения (15):

$$\varphi(\eta)=\int\frac{\eta}{\kappa\eta-1}\exp\left[-\frac{W\left(\dfrac{\eta e^{-1}}{e^{\frac{C_1}{\kappa}}e^{\frac{1}{\kappa\eta}}(\kappa\eta-1)}\right)\kappa\eta+C_1\eta+\kappa\eta+1}{\kappa\eta}\right]d\eta+\eta+C_2. \tag{26}$$

Теперь следует детерминировать константы C_1 и C_2 из граничных условий (21) и (22):

$$\lim_{\eta\to\infty}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)=W\left(\frac{e^{-1}}{\kappa e^{\frac{C_1}{\kappa}}}\right)+1. \tag{27}$$

Следовательно, если $W\left(\dfrac{e^{-1}}{\kappa e^{\frac{C_1}{\kappa}}}\right)+1=0$, то:

$$C_1=\kappa\ln\left(-\frac{1}{\kappa}\right). \tag{28}$$

Теперь, после подстановки (28) в (26), получим:

$$\lim_{\eta \to 0}\left(\left. \frac{d\varphi}{d\eta} \right|_{C_1=\kappa \ln\left(-\frac{1}{\kappa}\right)} \right) = 1 \quad , \tag{29}$$

что совпадает с предельным значением формулы (21).

Константу C_2 детерминируем из условия равенства (которое не противоречит и условию (21):

при $\eta \to 0$: $\varphi \to 0$; (30)

$$\lim_{\eta \to 0}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right) = \left. \int \frac{\eta}{\kappa\eta - 1} \exp\left[- \frac{W\left(\frac{\eta e^{-1}}{e^{\frac{C_1}{\kappa}} e^{\frac{1}{\kappa\eta}} (\kappa\eta - 1)} \right) \kappa\eta + C_1\eta + \kappa\eta + 1}{\kappa\eta} \right] d\eta \right|_{\eta=0} + C_2. \tag{31}$$

Следовательно:

$$C_2 = - \left. \int \frac{\eta}{\kappa\eta - 1} \exp\left[- \frac{W\left(\frac{\eta e^{-1}}{e^{\frac{C_1}{\kappa}} e^{\frac{1}{\kappa\eta}} (\kappa\eta - 1)} \right) \kappa\eta + C_1\eta + \kappa\eta + 1}{\kappa\eta} \right] d\eta \right|_{\eta=0} . \tag{32}$$

Окончательно общее решение уравнения (25) будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi(\eta) = \int \frac{\eta}{\kappa\eta - 1} \exp\left[- \frac{W\left(\frac{\eta e^{-1}}{e^{\frac{C_1}{\kappa}} e^{\frac{1}{\kappa\eta}} (\kappa\eta - 1)} \right) \kappa\eta + C_1\eta + \kappa\eta + 1}{\kappa\eta} \right] d\eta + \eta -$$

$$- \left. \int \frac{\eta}{\kappa\eta - 1} \exp\left[- \frac{W\left(\frac{\eta e^{-1}}{e^{\frac{C_1}{\kappa}} e^{\frac{1}{\kappa\eta}} (\kappa\eta - 1)} \right) \kappa\eta + C_1\eta + \kappa\eta + 1}{\kappa\eta} \right] d\eta \right|_{\eta=0} = \tag{33}$$

$$= \eta - \int_0^{\eta} \frac{\eta}{\kappa\eta - 1} \exp\left[- \frac{W\left(\dfrac{\eta e^{-1}}{e^{\frac{C_1}{\kappa}} e^{\frac{1}{\kappa\eta}} (\kappa\eta - 1)} \right) \kappa\eta + C_1\eta + \kappa\eta + 1}{\kappa\eta} \right] d\eta.$$

После подстановки константы C_1 и упрощений, получаем:

$$\varphi(\eta) = \int_0^{\eta} W\left(- \frac{\kappa\eta}{(\kappa\eta - 1) e^{\frac{\kappa\eta + 1}{\kappa\eta}}} \right) d\eta + \eta. \tag{34}$$

Выражение (34) представляет собой теоретический профиль безразмерной скорости по толщине пограничного слоя, соответствующий уравнениям (5) и (25).

В свете полученного решения (34) следует сказать несколько слов относительно непосредственного использования функциональных асимптотических граничных условий (21) и (22), как было сделано в работе [3] при приближённом решении уравнения (5) методом последовательных приближений с дополнительными допущениями.

Если непосредственно подставить функциональное граничное условие (22) в общее решение (26), то получим следующее:

$$\lim_{\eta \to \infty} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right) = W\left(\frac{e^{-1}}{\kappa e^{\frac{C_1}{\kappa}}} \right) + 1 = \frac{1}{\kappa\eta}, \tag{35}$$

$$C_1 = \frac{\ln\left(-\dfrac{1}{\kappa\eta} \right) \kappa\eta - 1}{\eta}. \tag{36}$$

Если подставить C_1 из (36) в (26), то:

$$\frac{d}{d\eta} \int \frac{\eta}{\kappa\eta - 1} \exp\left[- \frac{W\left(\dfrac{\eta e^{-1}}{e^{\frac{C_1}{\kappa}} e^{\frac{1}{\kappa\eta}} (\kappa\eta - 1)} \right) \kappa\eta + C_1\eta + \kappa\eta + 1}{\kappa\eta} \right] d\eta \equiv -1. \tag{37}$$

Если теперь использовать функциональное граничное условие (21), то получим:

$$\lim_{\eta \to 0} \left(\frac{1}{1 + (n\eta)^4} \right) = \tag{38}$$

$$
= \lim_{\eta \to 0} \left(\frac{d}{d\eta} \left(\int \frac{\eta}{\kappa\eta - 1} \exp \left[- \frac{W\left(\dfrac{\eta e^{-1}}{e^{\frac{C_1}{\kappa}} e^{\frac{1}{\kappa\eta}} (\kappa\eta - 1)} \right) \kappa\eta + C_1\eta + \kappa\eta + 1}{\kappa\eta} \right] d\eta + \eta + C_2 \right) \right).
$$

Левая часть (38) равна единице, а правая нулю, следовательно, имеет место формальное противоречие, чего не было при использовании предельных граничных условий.

Следовательно, указанное в работе [3] решение, полученное с помощью метода последовательных приближений, с использованием функциональных асимптотических граничных условий, достаточное для практических целей, на что указывает сопоставление результатов, представленное в той же работе, формально противоречит модельному дифференциальному уравнению. Столь удачное согласование разработанной в [3] теории с экспериментом, что можно поставить в заслугу авторам данной работы, объясняется подбором приближающих функциональных решений, не имеющих под собой оснований.

Заключение

1. В работе найдено точное аналитическое решение дифференциального уравнения для касательных напряжений в турбулентном пограничном слое, являющихся частным случаем т.н. дифференциального уравнения Абеля второго рода.

2. Решение дифференциального уравнения для касательных напряжений в турбулентном пограничном слое было получено с помощью специальной функции Ламберта, в то время как ранее считалось, что оно не разрешимо в квадратурах. (Доказательство необходимости применения специальной функции Ламберта для получения квадратур приведены в статье.)

3. Кроме решения дифференциального уравнения для касательных напряжений в турбулентном пограничном слое с помощью специальной функции Ламберта были получены ещё несколько важных решённых частных случаев этого уравнения.

4. Преимущество найденного в работе точного аналитического решения дифференциального уравнения для касательных напряжений в турбулентном пограничном слое состоит в том, что ранее имели место либо численные, либо приближённые (например, методом последовательных приближений дифференцированием [3]) решения задачи.

5. Полученное решение дифференциального уравнения для касательных напряжений в турбулентном пограничном слое позволило выявить определённые противоречия функциональных граничных условий, использованных в работе [3].

6. Полученное решение дифференциального уравнения для касательных напряжений в турбулентном пограничном слое в безразмерном виде представляет собой теоретический профиль безразмерной скорости по толщине пограничного слоя при турбулентном течении в пограничном слое.

Список литературы

1. Ляхов В.К., Мигалин К.В. Эффект тепловой или диффузионной шероховатости. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1990. 176с.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 296с.

3. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. *W*-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", 2006. 160с.

4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 577с.

5. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416с.

6. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1975. 488с.

Solution of the problem of the theoretical profile of non-dimensional speed on the thickness of the boundary layer at the turbulent flow in the boundary layer based on the solution of the differential equation of Abel of the second generation with the application of the Lambert function

Igor Evgenevich LOBANOV
Moscow aviation institute
D. Sc., leading researcher
Moscow, Russia
lloobbaannooff@live.ru

Abstract

An exact analytical solution of the differential equation for tangential stresses in a turbulent boundary layer, which is a special case of the so-called " of the Abel differential equation of the second kind, obtained with the help of the special Lambert function, whereas previously it was assumed that it is not solvable in quadratures. In addition, several more important solved special cases of this equation were obtained. The analytic solutions obtained in the paper are predominantly different from the previously available either numerical or approximate solutions of the problem. The solution obtained in dimensionless form is the theoretical profile of the dimensionless velocity along the thickness of the boundary layer for turbulent flow in the boundary layer.

Keywords

theoretical; modeling; mathematical; speed; coordinate; dimensionless; profile; heat exchange; turbulent; flow; boundary layer; the Abel differential equation; second kind; the first kind; Lambert function.

References

1. Lyakhov V.K., Migalin K.V. The effect of thermal or diffusional roughness. Saratov: Saratov University Publishing House, 1990. 176p.
2. Bateman G., Erdelyi A. Higher transcendental functions: Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials. M.: Nauka, 1966. 296p.
3. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Saikov S.K. W-Lambert's function and its application in mathematical problems of physics. Sarov: FSUE "RFNC-VNIIEF", 2006. 160p.
4. Kamke E. Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Nauka, 1965. 577 p.
5. Kutateladze S.S. Fundamentals of the theory of heat transfer. Moscow: Atomizdat, 1979. 416..
6. Isachenko V.P., Osipova V.A., Sukomel A.S. Heat transfer. M.: Energia, 1975. 488p.